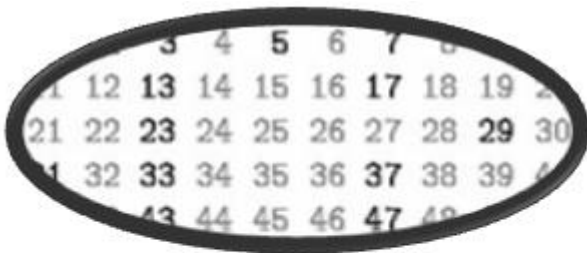




Inhalt

1. [Otto-Motor](#)
2. [Fundamentalsatz der Arithmetik](#)
3. [Primzahlen braucht kein Mensch](#)
4. [Weitere Rätsel um Primzahlen](#)
 1. [Wie viele verschiedene Primzahlen gibt es?](#)
 2. [Wie sind die Primzahlen verteilt, welche Muster gibt es?](#)
5. [Links zum Thema Primzahlen:](#)

Wer den Artikel über die [Goldbach'sche Vermutung](#) kennt, weiß bereits um die fundamentale Bedeutung der **Primzahlen**.



Primzahlen

Warum sind die Primzahlen von solch großer Bedeutung, was zeichnet diese speziellen Zahlen aus?

Zunächst müssen wir uns nochmals klar machen, was eine Primzahl überhaupt ist. Wir wissen aus den vorangegangenen Artikeln, dass es sich bei Primzahlen um natürliche Zahlen (*größer 1; 1 selbst ist keine Primzahl*) handelt, die nur durch Eins und sich selbst ohne Rest teilbar sind. Also zum Beispiel die Zahlen 2,3,5,7. Eine ganz besondere Eigenschaft der Primzahlen macht sie zu den Bausteinen der natürlichen Zahlen.



Otto-Motor*

Man kann verstehen, wie ein Otto-Motor funktioniert, ohne, dass man selbst in der Lage sein muss, ihn selbst zu bauen oder einzelne Bauteile auszulegen.

Genau so halten wir es mit unseren Primzahlen. Viele überkommt generell ein ungutes Gefühl, wenn sie mit Themen aus dem Gebiet der Mathematik konfrontiert werden. Fundamentalsatz, Algebra, Primzahlen, Zahlentheorie... Keine Angst! Wie in den vorangegangenen Artikeln absolvieren wir hier kein Mathematikstudium, sondern versuchen uns dem ganzen Thema auf einfache und verständliche Weise, völlig ohne die Verwendung komplizierter Formeln zu nähern. Das geht ganz wunderbar! Wir können dann zwar keine komplizierten Beweise führen oder bahnbrechende neue Erkenntnisse gewinnen, aber wir können bestimmte Sachverhalte endlich verstehen.

Fundamentalsatz der Arithmetik*

Der Begriff sagt bereits alles über die Wichtigkeit des Satzes aus. Sehen wir uns den Satz einmal an:

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von endlich vielen Primzahlen darstellen. Ordnet man die Faktoren der Größe nach, ist die Darstellung eindeutig.

Was bedeutet das?

Der Fundamentalsatz sagt, dass man jede natürliche Zahl als Produkt aus Primzahlen darstellen kann.

1 = leeres Produkt

2 = Primzahl = 2

3 = Primzahl = 3



$$4 = 2 * 2$$

$$5 = \text{Primzahl} = 5$$

$$6 = 2 * 3$$

$$7 = \text{Primzahl} = 7$$

$$8 = 2 * 2 * 2$$

$$9 = 3 * 3$$

$$10 = 2 * 5$$

...

Wer sich an den Mathematikunterricht zurückerinnert, dem dürfte noch bekannt sein, dass Multiplikation **kommutativ** (Kommutativgesetz = Vertauschungsgesetz) ist. Es ist also gleich, ob ich für die Zahl $10 = 5 * 2$ oder ob ich $10 = 2 * 5$ schreibe. Im Fundamentalsatz steht ja, dass das Produkt eindeutig ist, wenn ich die Primzahlen der Größe nach ordne. D.h. $10 = 2 * 5$ ist eindeutig. Es gibt keine anderen Primzahlen, mit denen ich die Zahl 10 so darstellen könnte.

Die Primzahlen sind also so etwas wie Atome, aus denen unsere natürlichen Zahlen aufgebaut sind. Man muss Primzahlen nur miteinander multiplizieren und erhält daraus alle natürlichen Zahlen.

Entgegen der Goldbach'schen Vermutung ist der Fundamentalsatz bewiesen. Er ist damit unumstößlich. Für ein Fundament nicht schlecht. Geleistet hat dies Carl Friedrich Gauß.

Primzahlen braucht kein Mensch *

-

Wozu diese ganze Theorie, warum Primzahlen?

Zunächst einmal ist Mathematik an sich fundamental für unsere Naturwissenschaften. Keine Ingenieurleistung und kein technischer Fortschritt ohne Mathematik.

Wenn es um den Fundamentalsatz der Arithmetik geht, gibt es jedoch eine unmittelbare ganz konkrete Anwendung. Unsere Beispiele für die Primzahlfaktorzerlegung oben sind sehr einfach. Man sieht für kleinere Zahlen meist direkt, wie die Zerlegung lautet. Bei 77 sieht man leicht, dass $7 * 11$ die korrekte Zerlegung ist. Kleine Zahlen kann man also ohne viel Aufwand, mit etwas Übung schnell in die Primzahlfaktoren zerlegen.



Wie sieht das aber mit riesigen Zahlen aus?

Schlecht!

Es gibt **zurzeit** kein Verfahren, um **rasch** die Primzahlen zu ermitteln, aus denen sich eine bestimmte Zahl zusammensetzt. Um also wirklich große Zahlen (*Zahlen mit mehreren hundert Stellen*) zu **faktorisieren** (*Zahl in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen*) ist ein **enormer Rechenaufwand** nötig. Auf der anderen Seite ist es extrem einfach, große Zahlen miteinander zu multiplizieren. Letzteres gelingt sogar für sehr große Zahlen im Zweifelsfall mit Papier und Bleistift.

Und genau diesen Umstand - **große Zahlen sind leicht miteinander zu multiplizieren, aber schwer in die Primzahlfaktoren zu zerlegen** - macht man sich im berühmten **asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren RSA** zu nutze. Das **Entschlüsseln** bei RSA erfordert eine **Faktorisierung** einer sehr großen Zahl. Wer oben genau gelesen hat, wird über das Wort „zurzeit“ gestolpert sein. In der Tat ist es so, dass es nicht ausgeschlossen ist, dass künftig ein Verfahren gefunden wird, mit dem es in akzeptabler Zeit möglich ist, selbst riesige Zahlen zu faktorisieren. Damit wäre das Verschlüsselungsverfahren RSA geknackt und wir hätten ein großes Problem.

Wir haben uns jetzt mit dem Fundamentalsatz der Arithmetik einen Baustein erarbeitet, mit dem wir uns in einem kommenden Artikel mit dem Verfahren RSA selbst befassen können.

Weitere Rätsel um Primzahlen *

Wie viele verschiedene Primzahlen gibt es? *

Die weiter unten aufgeführte Dokumentation zeigt anschaulich, dass es eine **unendliche** Menge an Primzahlen gibt. Zu jeder Primzahl, sei sie auch noch so groß, lässt sich eine Primzahl finden, die größer ist.



Wie sind die Primzahlen verteilt, welche Muster gibt es? *

Auch hier leistete [Carl Friedrich Gauß](#) wieder einen wesentlichen Beitrag, der [Bernhard Riemann](#) zur berühmten [Riemannschen Vermutung](#) führt. Gauß untersuchte die Primzahlverteilung und stellte dabei fest, dass die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Abschnitt der natürlichen Zahlen eine Primzahl zu finden, Regelmäßigkeiten aufweist. Im zweiten Teil der Dokumentation unten wird darauf eingegangen.

Links zum Thema Primzahlen: *

<http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/zahlen/primzahlen.html>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlen>

Eine sehr schöne **Dokumentation** zu den Primzahlen findet man hier:

Teil 1:

<http://www.youtube.com/watch?v=F9x2L54X9gg>

Teil 2:

<http://www.youtube.com/watch?v=uj51OxKeg7M>

Teil 3:

<http://www.youtube.com/watch?v=22AVi2NBooM>

Teil 4:

<http://www.youtube.com/watch?v=XQ8kuzz1Nzo>

Teil 5:

<http://www.youtube.com/watch?v=ipqxT7dbYN0>

Teil 6:

<http://www.youtube.com/watch?v=aQBqj3B7drk>

Teil 7:

<http://www.youtube.com/watch?v=4anbDAGMxoA>



Teil 8:

<http://www.youtube.com/watch?v=8heuLCDU0ac>

Teil 9:

<http://www.youtube.com/watch?v=Y6uXp8dv6TA>